

Рекомендований математичний інструментарій розрахунку вартості фінансових активів

I. Загальні положення

Приведене нижче загальне рівняння дозволяє при відомих параметрах цінного паперу, що знаходяться в активах ІСІ, визначити доходність (відсоткову ставку, ставку дисконтування – залежить від поставленої задачі), вартість активу, розміри грошового потоку у будь-який момент часу.

Загальне рівняння для роботи з грошовими потоками у випадку складних відсотків (для довгострокових фінансових активів):

$$P \times (1 + r)^{T/365} = \sum_{i=1}^{m-1} Ci(1 + r)^{di/365} + Cm, \quad (1.1)$$

де:

- P – вартість активу на початку часового проміжку;
- r – річна доходність (відсоткова ставка);
- di – час у днях від моменту останнього грошового надходження до моменту i-го надходження коштів;
- Ci – розмір i-го грошового надходження;
- Cm – розмір останнього грошового надходження;
- T – час у днях від початкового моменту до моменту останнього грошового надходження;
- m – кількість грошових надходжень.

Зауваження: надалі будемо вважати, що разом з номіналом виплачується також останній купонний платіж (для відсоткових (процентних) боргових цінних паперів).

Похідними від цього рівняння є формули:

- Доходність до погашення; Доходність до продажу (викупу);
- Теперішня вартість з урахуванням доходності до погашення (або продажу (викупу));
- Формули, що стосуються дебіторської заборгованості.

Зауваження: У випадку, коли фінансовий актив зі складними відсотками (довгостроковий) не задовольняє умови випадків, для яких використовуються вищезазначені похідні формули (ці випадки описані нижче), необхідно користуватись загальним рівнянням.

II. Оцінка боргових цінних паперів

1. Визначення доходності до погашення або до продажу (викупу)

1.1. При оцінці (розрахунку теперішньої вартості з урахуванням доходності до погашення або до продажу (викупу)) боргових цінних паперів, які знаходяться в активах ІСІ, необхідно знати показники, що використовуються для характеристики цінного паперу.

1.2. Доходність до погашення довгострокових процентних боргових цінних паперів (векселів, облігацій):

Точне значення доходності до погашення можна знайти з наступного рівняння:

$$P \times (1 + r)^m = C \times \sum_{i=1}^m (1 + r)^{i-1} + N, \quad (1.2.1)$$

де:

P – ціна придбання цінного паперу;

r – шукана доходність;

N – номінал;

C – купонний платіж;

m – кількість купонних платежів, які відбудуться (якщо виплати раз на рік, то доходність середньорічна, якщо раз на півроку – середня за півроку, і т.д.)

У випадку, коли $m > 3$, формул для розв'язку рівняння не існує (відомий факт з вищої алгебри). В такому разі варто використовувати чисельні методи розв'язання (наприклад MS Excel, функція ВСД).

Якщо немає такої можливості, то варто користуватись **формулою наближеного значення доходності до погашення:**

$$r = \frac{C + \frac{N - P}{m}}{\frac{N + P}{2}}, \quad (1.2.2)$$

де:

P – ціна придбання цінного паперу;

r – шукана доходність;

N – номінал;

C – купонний платіж;

m – кількість купонних платежів, які відбудуться.

Приклад обчислення доходності до погашення:

Номінал: 1000 грн. од.

Купонна ставка (купон): 9,45%

Періодичність виплати купона: два рази на рік.

Дата погашення: 22.04.2015

Дата придбання: 22.10.2012

Ціна придбання: 900 грн. од.

Нехай виплати також відбуваються у кінці періоду. Тобто ми отримаємо купонні виплати 5 разів.

Отже, $N = 1000$, $P = 900$, $m = 22.04.2015 - 22.10.2012 = 2,5$ роки = 5, $C = N * 9,45\% = 1000 * 0,0945 = 94,5$.

Як бачимо $m > 3$. Тому точне значення доходності ми знайти не можемо. Скористаємось формулою для наближеного значення:

$$r = \frac{\frac{189}{2} + \frac{1000 - 900}{5}}{\frac{1000 + 900}{2}} = 0,12 = 12\%$$

1.3. Доходність до погашення довгострокових безпроцентних боргових цінних паперів (векселів, облігацій):

$$r = \sqrt[m]{\frac{N}{P}} - 1, \quad (1.3)$$

де:

P – ціна придбання цінного паперу;

r – шукана доходність;

N – номінал;

m – кількість періодів (для середньорічної доходності – кількість років, для середньоквартальної – кількість кварталів, і т.д.)

Приклад обчислення доходності до погашення:

Номінал: 1 000 гр. од.

Дата погашення: 22.04.2015

Дата придбання: 22.04.2013

Ціна придбання: 900 гр. од.

Отже, N = 1000, P = 900, m = 22.04.2015 - 22.04.2013 = 2 роки = 2 (порахуємо середньорічну доходність).

$$r = \sqrt{\frac{1000}{900}} - 1 = 0,054 = 5,4\%$$

1.4. Доходність до продажу (викупу) довгострокових процентних боргових цінних паперів (векселів, облігацій).

Точне значення доходності до продажу можна знайти з такого рівняння:

$$P_{buy} \times (1+r)^{m+\frac{n-t1}{T}-[\frac{n-t1}{T}]+1+\frac{t1}{T}} = C \times \sum_{i=1}^{m-1} (1+r)^{i+\frac{n-t1}{T}-[\frac{n-t1}{T}]} + C \times (1+r)^{\frac{n-t1}{T}-[\frac{n-t1}{T}]} + P_{sell}, \quad (1.4.1)$$

де:

P_{buy} – ціна придбання цінного паперу,

r – шукана доходність,

P_{sell} – ціна продажу,

C – купонний платіж,

m – кількість купонних платежів, які ми отримаємо,

n – кількість років до моменту продажу,

T – періодичність виплати купона у роках,

$[\frac{n-t1}{T}]$ - ціла частина числа $\frac{n-t1}{T}$ (ціла частина 1,5 : [1,5] = 1; ціла частина 0,33: [0,33] =

0),

t1 – час у роках до першої купонної виплати.

У випадку, коли $m > 3$ або $[\frac{n}{T}]$ дорівнює 0, рівняння, найвірогідніше, неможливо буде вирішити точно (відомий факт з вищої алгебри). У такому випадку варто користуватись чисельними методами розв'язання (наприклад MS Excel).

Якщо немає такої можливості, то варто користуватись **формулою наближеного значення доходності до продажу:**

$$r = \frac{C + \frac{P_{sell} - P_{buy}}{m + [\frac{n}{T}]}}{\frac{P_{sell} + P_{buy}}{2}}, \quad (1.4.2)$$

де:

P_{buy} – ціна придбання цінного паперу,

r – шукана доходність,

P_{sell} – ціна продажу,

C – купонний платіж,

m – кількість купонних платежів, які ми отримуємо,

n – кількість років до моменту продажу,

T – періодичність виплати купона у роках,

$[\frac{n}{T}]$ - ціла частина числа $\frac{n}{T}$ (ціла частина 1,5 : $[1,5] = 1$; ціла частина 0,33: $[0,33] = 0$).

Приклад обчислення доходності до моменту продажу:

Номінал: 1 000 гр. од.

Ціна продажу: 990 гр. од.

Купонна ставка: 9,45%

Періодичність виплати купона: два рази на рік.

Дата погашення: 22.04.2015

Дата продажу: 22.09.2014

Дата придбання: 22.12.2012

Ціна придбання: 900 гр. од.

Дата першої купонної виплати: 22.04.2013

Нехай виплати також відбуваються на початку періоду не включаючи сьогоднішній день (22.10.2012). Тобто ми отримуємо купонні виплати 3 рази.

Отже, $P_{buy} = 900$, $P_{sell} = 990$, $t_1 = 22.04.2013 - 22.12.2012 = 4$ місяці = 0,33 роки = 0,33, $n - t_1 = 22.09.2014 - 22.12.2012 - 0,33 = 1,73$ років – 0,33 = 1,4, $C = N * 9,45\% = 1000 * 0,0945 = 94,5$, $T = 0,5$ років = 0,5, $[\frac{n - t_1}{T}] = [2,8] = 2$.

Рівняння набуде наступного вигляду:

$$900 \times (1 + r)^{2+0,8-1+0,66} = 94,5 \times \sum_{i=1}^{3-1} (1 + r)^{i+0,8} + 94,5 \times (1 + r)^{0,8} + 990$$

Вирішити його точно – нетривіальна задача, тому скористаємось формулою наближеного значення:

$$\frac{94,5 + \frac{990 - 900}{2,8}}{\frac{990 + 900}{2}} = 0,134 = 13,5\%$$

1.5. Доходність до продажу (випуку) довгострокових безпроцентних боргових цінних паперів (векселів, облігацій):

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_{sell}}{P_{buy}}} - 1, \quad (1.5)$$

де:

P_{buy} – ціна придбання цінного паперу;

r – шукана доходність;
 P_{sell} – ціна продажу;
 n – кількість періодів до продажу (для середньорічної доходності – кількість років, для середньоквартальної – кількість кварталів, і т.д.)

Приклад обчислення доходності до продажу:

Номінал: 1 000 гр.од.

Ціна продажу: 990 гр. од.

Дата погашення: 22.04.2015

Дата продажу: 22.09.2014

Дата придбання: 22.04.2013

Ціна придбання: 900 гр. од.

Отже, $P_{\text{buy}} = 900$, $P_{\text{sell}} = 990$, $n = 22.09.2014 - 22.04.2013 = 1,4$ роки = 1,4 (порахуємо середньорічну доходність).

$$r = \sqrt[1,4]{\frac{990}{900}} = \left(\frac{990}{900}\right)^{1/1,4} - 1 = 0,07 = 7\%$$

1.6. Доходність короткострокових безпроцентних/дисконтних боргових цінних паперів (векселів, облігацій):

а) Якщо інвестор придбав вексель/облігацію і буде володіти до погашення – доходність до погашення:

$$r = ((N / P \text{ придб.} - 1) \times 360 / n, \quad (1.6.1)$$

де:

P придб. – ціна придбання;

N – ціна погашення (номінал);

n – кількість днів до погашення.

Приклад обчислення доходності до погашення:

Нехай ми придбали 01.01.2015 вексель з датою погашення – 11.04.2015. Номінал векселя – 100 гр.од. Ціна придбання – 90 гр.од.

Отже, $P_{\text{придб.}} = 90$, $N = 100$, $n = 100$.

Тоді річна доходність до погашення дорівнює: $\frac{100 - 90}{90} \times \frac{360}{100} = 0,4 = 40\%$.

б) Якщо вексель/облігацію буде викуплено до терміну погашення – доходність до продажу (викупу):

$$r = ((P \text{ вик.} / P \text{ придб.} - 1) \times 360 / n, \quad (1.6.2)$$

де:

P придб. – ціна придбання векселя/облігації;

P вик. – ціна продажу (викупу) векселя/облігації;

n – кількість днів володіння інвестором векселем/облігацією.

Приклад обчислення доходності до погашення:

Нехай ми придбали 01.01.2015 вексель і плануємо його продати 01.04.2015 за 100 гр.од. Ціна придбання – 90 гр.од.

Отже, $P_{\text{придб.}} = 90$, $N = 100$, $n = 90$.

Тоді річна доходність до продажу дорівнює: $\frac{100-90}{90} \times \frac{360}{90} = 0,44 = 44\%$.

2. Визначення теперішньої вартості з урахуванням доходності до погашення або до продажу (викупу)

2.1. *Теперішня вартість довгострокових процентних боргових цінних паперів з урахуванням доходності до погашення (або до продажу (викупу)) (P).*

а) *Процентні боргові цінні папери з фіксованою відсотковою ставкою:*

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{Ct}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^n}, \quad (2.1.1)$$

де:

Ct — купонний платіж у момент часу t ;
 r — ставка доходу до погашення (або викупу);
 N — номінал;
 n — кількість купонних виплат до погашення.

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Номінал: 1 000 гр. од.

Купонна ставка: 9,45%

Періодичність виплати купона: два рази на рік.

Дата погашення: 22.04.2015

Сьогоднішня дата: 22.10.2012

Ставка доходу до погашення: 5%

Нехай виплати відбуваються у кінці періоду. Тобто ми отримаємо купонні виплати 5 разів.

Отже, $N = 1000$; $Ct = N * 9,45\% = 1000 * 0,0945 = 94,5$; $r = 5\% = 0,05$; $n = 5$;

Тоді теперішня вартість дорівнює: $\sum_{t=1}^5 \frac{94,5}{(1+0,05)^t} + \frac{1000}{(1+0,05)^5} = 1192,662$

Якщо з моменту останніх купонних виплат минуло $t1$ днів, до наступних виплат залишилося t днів, а купонний період – T днів (встановлюється умовами випуску та розміщення облігації), то теперішня вартість такої облігації може бути обчислена за формулою:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t/T}} + \frac{C_2}{(1+r)^{t/T+1}} + \dots + \frac{C_n + N}{(1+r)^{t/T+(n-1)}}; \quad (2.1.2)$$

або

$$\dot{P} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C}{(1+r)^{t/T+i}} + \frac{N}{(1+r)^{t/T+(n-1)}}, \quad (2.1.3)$$

де:

C — купонний платіж у відповідному купонному періоді;

r — ставка доходу до погашення;
 N — номінал;
 n — кількість купонних виплат до погашення.

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Номінал: 1 000 гр. од.
 Купонна ставка: 9,45%,
 Періодичність виплати купона: два рази на рік.
 Дата погашення: 22.04.2015
 Сьогоднішня дата: 20.08.2013
 Ставка доходу до погашення: 5%

Нехай виплати відбуваються у кінці періоду. Тобто ми отримуємо купонні виплати ще 4 рази. Нехай наступна купонна виплата відбудеться 19.10.2013.

Отже, $t = 60$; $N = 1000$; $r = 5\% = 0,05$; $n = 4$; Купонні платежі: $C_i = N * 9,45\% = 1000 * 0,0945 = 94,5$.

Тоді теперішня вартість дорівнює:
$$\sum_{i=0}^3 \frac{94,5}{(1+0,05)^{(60/180)^{+i}}} + \frac{1000}{(1+0,05)^{(60/180)^{+3}}} = 1196,073$$

б) Безпроцентні боргові цінні папери:

$$\dot{P} = \frac{N}{(1+r)^n} \quad (2.1.4)$$

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Номінал: 1 000 гр. од.
 Дата погашення: 22.04.2015
 Сьогоднішня дата: 22.10.2013
 Ставка доходу до погашення (річна): 5%

Отже, $N = 1000$; $r = 5\% = 0,05$; $n = 22.04.2015 - 22.10.2013 = 1,5$ роки.

Тоді теперішня вартість дорівнює: $\frac{1000}{(1+0,05)^{1,5}} = 929$.

2.2. Теперішня вартість короткострокових безпроцентних боргових цінних паперів з урахуванням доходності до погашення (або до продажу (викупу)) (P):

$$P = \frac{N}{(1+r \times \frac{n}{360})}, \quad (2.2)$$

де:

N — номінал векселя/облігації (або ціна продажу (викупу));
 r — річна ставка доходу до погашення (або продажу (викупу));
 n — кількість днів до погашення (або продажу викупу).

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Нехай сьогодні 01.01.2015. Ми маємо вексель з датою погашення – 11.04.2015. Номінал векселя – 100 гр.од. Річна ставка доходу до погашення – 40%.

Отже, $N = 100$, $n = 100$, $r = 40\% = 0,4$.

Тоді теперішня вартість векселя: $\frac{100}{(1 + 0,4 \times \frac{100}{360})} = 90$

III. Оцінка дебіторської заборгованості

3.1. Теперішня вартість дебіторської заборгованості з урахуванням ставки дисконтування (процентної ставки) визначеної договором, може бути визначена за допомогою наступної формули:

$$\dot{P} = \sum_{t=1}^n \frac{Ct}{(1+k)^t} + \frac{N}{(1+k)^n}, \quad (3.2)$$

де:

Ct – розмір відсотків, що нараховуються згідно договору у відповідному періоді (у грошовому виразі);

k – відсоткова ставка за договором у відповідному періоді;

n – кількість відсоткових виплат до повернення боргу (вважаємо, що разом з боргом також виплачуються і відсотки);

N – сума боргу, що повертається.

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Нехай зараз 01.01.2015. За договором нам мають виплатити 1000 грошових одиниць 01.01.2020. Також за договором нам виплачуються по 100 грошових одиниць у кінці кожного року. Відсоткова ставка – 10%.

Отже, $n = 5$; $C_1 = 100$, $C_2 = 100$, $C_3 = 100$, $C_4 = 100$, $C_5 = 100$; $k = 10\% = 0,1$; $N = 1000$.

Теперішня вартість дорівнює:

$$\frac{100}{(1+0,1)} + \frac{100}{(1+0,1) \times (1+0,1)} + \frac{100}{(1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1)} + \frac{100}{(1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1)} + \frac{100 + 1000}{(1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1) \times (1+0,1)} = 1000$$

3.2. Довгострокова дебіторська заборгованість, на яку проценти не нараховуються, оцінюється за її теперішньою вартістю з урахуванням поточної ринкової процентної ставки (ставки дисконтування).

Теперішня вартість з урахуванням ставки дисконтування – процентної ставки, враховуючи поточні ринкові ставки, може бути визначена за допомогою наступної формули:

$$\dot{P} = \frac{N}{(1+s)^n}, \quad (3.3)$$

де:

N – сума боргу, що повертається;

S – поточна ринкова ставка;

n — кількість років до погашення.

Приклад обчислення теперішньої вартості:

Нехай сьогодні 01.01.2015. Нам мають повернути 100 гр.од. 01.07.2020. Поточна ринкова ставка – 10%.

Отже, $N = 100$; $s = 10\% = 0,1$; $n = 01.07.2020 - 01.01.2015 = 5,5$ років.

Тоді теперішня вартість дорівнює: $\frac{100}{(1 + 0,1)^{5,5}} = 59,2$